Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contrexemples.

RM
2022-2023

Soit X un ensemble non vide quelconque et $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Convergence des suites et séries de fonctions

1.1 Convergence simple

Définition 1 : Soit (f_n) une suite d'applications de X dans E, et f une application de X dans E. On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si, pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ converge dans E vers $f(x)$. On dit alors que f est la limite simple noté $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{C.S}{\longrightarrow}} f$.

Exemple 2 : La suites des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ converge simplement vers la fonctions $f : x \in [0,1[\mapsto 0$ et $f(1) = 1$. On observe sur cet exemple que toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ alors que f n'est même pas continue.

Définition 3 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E. On appelle série de fonctions f_n et on note $\sum f_n$, la suite (S_n) où S_n désigne l'application de X dans E par $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ et est appelé la n-ième somme partielle de la série $\sum f_n$.

Définition 4 : Lorsque la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X, on dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur X. La fonction limite S de (S_n) s'appelle la fonction somme de $\sum f_n$, et on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. On a alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Exemple 5 : Considérons $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto xe^{-nx}$. Pour $x = 0$, la convergence est évidente et si $x \in \mathbb{R}_*^+$, alors $f_n(x) = o(1/n^2)$. On a donc convergence de la série, et on peut même calculer $S(x)$. On trouve $S(x) = \frac{x}{1-e^{-x}}$ si $x \in \mathbb{R}_*^+$ et $S(0) = 0$.

1.2 Convergence uniforme

Définition 6 : On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X si $forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow (\forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon)$. On dit que f est la limite uniforme sur X de (f_n), on note $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{C.U}{\longrightarrow}} f$.

Remarque 7 : La convergence uniforme implique la convergence simple.

Proposition 8 : Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans E convergeant simplement vers f. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|$. Alors (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si (μ_n) tends vers zéro.

Exemple 9 : Pour $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$, on a $\mu_n = 1$. On en déduit que la suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément.

Théorème (Critère de Cauchy uniforme) 10 : Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans E. Pour que la suite (f_n) converge uniformément, il faut que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n, p \geq N \Rightarrow \forall x \in X, \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$. Cette condition est suffisante sir E est un banach.

Remarque 11 : Ceci nous permet de montrer que (f_n) converge uniformément sans savoir f.

Théorème (de Weierstrass) 12 : Toute fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$ est limite uniforme d'une suite de polynômes (P_n).

Théorème 13 : Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel de dimension finie F, et soit (f_n) une suite de fonctions continues de A dans E convergeant uniformément. Alors leur limite f est continue sur A.

Remarque 14 : Ceci nous permet par exemple de conclure que (f_n) ne converge pas dans l'exemple 2.

Définition 15 : On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur X.

Définition 16 : On dit que la série $\sum f_n$ converge absolument sur X si, pour tout $x \in X$, la série réelle $\sum \|f_n(x)\|$ converge.

Proposition 17 : La convergence absolue entraine la convergence simple.

1.3 Convergence normale des séries de fonctions

Définition 18 : On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur X si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty < +\infty$ et la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Proposition 19 : La série $\sum f_n$ converge normalement si et seulement si $\exists (\alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, $\|f_n(x)\| \leq \alpha_n$ et la série $\sum \alpha_n$ converge.

Théorème/Remarque 20 : La convergence normale entraîne la convergence uniforme et absolue. Ceci est très pratique car il est souvent plus facile de montrer qu'une fonction converge normalement que uniformément, et donc il est plus facile de montrer la convergence uniforme.

Exemple 21 : La série $\sum xe^{-nx}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.

Théorème 22 : Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans E. On suppose que f_n est continue sur X pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X. Alors la fonction somme S de $\sum f_n$ est continue sur X.

2 Convergence en théorie de la mesure

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème (Convergence monotone ou Beppo Levi) 23 : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions positives mesurables. Alors $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable et on a

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

Théorème (Lemme de Fatou) 24 : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque de fonctions mesurables positives. Alors on a

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Théorème (de convergence dominée) 25 : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions complexes mesurables de $(E, \mathcal{T}, \mu)$ dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ telle que

i) Pour μ-presque tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

ii) il existe une fonction positive g, μ-intégrable sur X et telle que $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \mu - p.p.$

Alors la fonction f (définie $\mu - p.p$) est μ-intégrable et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \;\text{ et }\; \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Application 26 : Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On a alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)^n dt = 0$ grâce au théorème de convergence dominée.

Remarque/Contre-exemple 27 : L'hypothèse de domination est cruciale. Par exemple avec $(f_n)_{n\geq 2}$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} n^2x \text{ si } 0 \leq x \leq 1/n \\ -n^2x + 2n \text{ si } 1/n < x < 2/n \\ 0 \text{ si } 2/n \leq x \leq 1 \end{cases}$, on a que (f_n) est intégrable de limite simple intégrable, mais que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt \neq \int_0^1 f(t)dt$.

Théorème 28 : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions μ-intégrables sur E telles que la suite numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E |f_n| d\mu$ converge. Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument pour μ-presque tout $x \in E$. De plus, la fonction f (définie $\mu-p.p$) par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est μ-intégrable sur E et on a

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Remarque/contre-exemple 29 : Il est important d'avoir que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E |f_n| d\mu$ converge. Par exemple, si on considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$, alors on a que $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

Exemple 30 : Soit $a > 0$, et $f : x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Alors on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Définition 31 : Pour $p \in [1, +\infty[$, soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On dit que la suite (f_n) converge vers f dans L^p si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Développement (Théorème de Riesz-Fisher) 32 : Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach (complet pour la norme $\|.\|_p$). De plus, tout suite qui converge dans L^p admet une sous suite qui converge μ-p.p. **Dev 1**

3 Série entière et série de Fourier

3.1 Série entière

Définition 33 : On appelle série entière complexe de variable complexe toute série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : z \mapsto a_n z^n$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ avec (a_n) une suite complexe. On la note $\sum a_n z^n$.

Lemme (Abel) 34 : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors, pour tout nombre complexe z tel que $0 \geq |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Théorème 35 : Il existe un nombre R et un seul tel que :
1) si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2) si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge.

Remarque 36 : On peut avoir $R=0$ et $R=+\infty$. Si $R=+\infty$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout z de $\mathbb{C}$.

Définition 37 : L'élément $R=\sup\{r\in\mathbb{R}_+,\ \text{la suite } (|a_n|r^n) \text{ est bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Le disque ouvert $\{z\in\mathbb{C}, |z|<R\}$ est le disque de convergence de la série.

Remarque 38 : L'ensemble $\{z\in\mathbb{C}, |z|=R\}$ est appelé le cercle d'incertitude. Si R est fini, on ne peut prévoir le comportement de la série sur ce cercle. Par exemple, les trois séries entières suivantes ont un rayon de convergence égale à 1 mais :

- La série $\sum z^n$ diverge en tout point tel que $|z|=1$.
- La série $\sum z^n/n^2$ converge en tout point tel que $|z|=1$.
- La série $\sum z^n/n$ diverge en $z=1$, mais converge mais pour tout autre point tel que $|z|=1$.

Proposition (Règle de d'Alembert) 39 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et notons R son rayon de convergence. Si la suite de terme général $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ converge vers $L\in\overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R=1/L$.

Exemple 40 : On trouve que le rayon de converge de la série $\sum z^n/n!$ est $R=+\infty$.

Remarque 41 : La règle de d'Alembert ne fonctionne pas sur les séries entières de la forme $\sum a_n z^{2n}$, $\sum a_n z^{2n+1}$ ou $\sum a_n z^{n^2}$. On peut s'en sortir en utilisant la règle de d'Alembert pour les série numérique. Par exemple, pour trouver le rayon de convergence de $\sum \frac{2^n z^{2n+1}}{n+1}$, on pose $u_n=\frac{2^n||z_0|^{2n+1}}{n+1}$ pour $z_0\in\mathbb{C}^*$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=2|z_0|^2$. Comme on veut $2|z_0|^2<1$, on en déduit que $R=1/\sqrt{2}$.

Théorème (Formule de Hadamard) 42 : Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $R=1/L$ avec $L=\limsup\limits_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}$.

Corollaire (Règle de Cauchy) 43 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si la suite $|a_n|^{1/n}$ converge vers $L\in\overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R=1/L$.

Exemple 44 : Pour la série entière $\sum \frac{n}{2^n}z^n$, on a $R=2$.

Proposition 45 : La série entière dérivée de $\sum a_n z^n$ est $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ et à le même rayon de convergence que celle-ci.

Théorème 46 : Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.

Théorème 47 : Soient $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence, et S sa somme. Alors la fonction S est continue sur le disque ouvert $D(0,R)$.

3.2 Série de Fourier

Définition 48 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle coefficients de Fourrier exponentielle et trigonométrique de f les nombres complexes définis par $\forall n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f)=1/2\pi\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt$,$\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n(f)=1/\pi\int_0^{2\pi}f(t)\cos ntdt$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=A/\pi\int_0^{2\pi}f(t)\sin ntdt$.
On appelle série de Fourrier associé à f la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e^{inx}$ ou $a_0(f)/2+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx)$.

Remarque 49 : On va montrer après des cas de convergence.

Proposition 50 : En posant $b_0(f)=0$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ que $a_n(f)=c_n(f)+c_{-n}(f)$ et $b_n(f)=i(c_n(f)-c_{-n}(f))$.

Proposition 51 : Soit f une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,2\pi]$. Alors f' est continue par morceaux et 2π-périodique, et on a pour tout $n\in\mathbb{Z}, c_n(f')=inc_n(f)$.

Remarque 52 : Si f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $[0,2\pi]$ et $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur ce segment, on obtient par itération que pour tout $n\in\mathbb{Z}, c_n(f^{(k)})=(in)^k c_n(f)$.

Proposition 53 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors :
Si f est paire, alors $b_n(f)=0$ et $a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos ntdt$.
si f est impaire, alors $a_n(f)=0$ et $b_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin ntdt$.

Théorème (Égalité de Parseval) 54 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux.
Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2, \sum|a_n(f)|^2, \sum|b_n(f)|^2$ convergent et on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2=\frac{|a_0(f)|^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n(f)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$$

Théorème (Riemann-Lebesgue) 55 : Soit $f:I=[a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{ixt}dt=0$.

Théorème (Jordan-Dirichlet) 56 : • Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$

par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourrier de f converge en ce point x vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. En particulier, si f est continue en x, la série de Fourrier de f en x converge vers $f(x)$.
• Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourrier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Application 57 : Ceci nous permet de calculer par exemple les $\zeta(2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

Exemple/Application 58 : En étudiant les coefficients de Fourrier de $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$, on en déduit que $\zeta(2) = \pi^2/6, \zeta(4) = \pi^4/90, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \pi^2/8$.

Application 59 : Nous avons les résultats suivants pour les intégrales de Fresnel : $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Dev 2

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Suites et séries numériques/fonctions El Amrani
3. Exemple et contre-exemple Hauchecorne
4. isenmann (rip)
5. intégration, convolution ... El haj Laamri